

A10.1

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [21, 29]$ и $Q = [12, 42]$.

Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \wedge ((x \in A) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

Варианты ответов:

- 1) [7, 33] 2) [17, 33] 3) [7, 43] 4) [17, 43]

Решение:

Первый элемент конъюнкции $((x \in P) \rightarrow (x \in A))$ истинен для всех x , если $P \subseteq A$. Второй элемент конъюнкции $((x \in A) \rightarrow (x \in Q))$ истинен для всех x , если $A \subseteq Q$. Таким образом, конъюнкция тождественно истинна тогда и только тогда, когда $P \subseteq A \subseteq Q$. Этому условию удовлетворяет только отрезок [18, 31].

Ответ: [17, 33] (вариант 2).

A10.2

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [6, 16]$ и $Q = [10, 20]$.

Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in A) \rightarrow \neg(x \in Q)) \vee (x \in P)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

Варианты ответов:

- 1) [5, 15] 2) [5, 25] 3) [5, 35] 4) [15, 35]

Решение:

Преобразуем выражение – заменим импликацию дизъюнкцией. Получим:

$$(\neg(x \in A)) \vee (\neg(x \in Q)) \vee (x \in P)$$

Выражение $(\neg(x \in Q)) \vee (x \in P)$ истинно для тех только тех x , которые либо лежат в P , либо не лежат в Q , иными словами – для $x \in R$, где $R = (-\infty, 15] \cup (21, +\infty)$. Выражение

$$(\neg(x \in A)) \vee (x \in R)$$

тождественно истинно тогда и только тогда, когда $A \subseteq R$. Этому условию удовлетворяет только отрезок [5, 15].

Ответ: [5, 1] (вариант 1).

A10.3

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [14, 34]$ и $Q = [24, 44]$.

Выберите такой отрезок A , что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

Варианты ответов:

- 1) [15, 19] 2) [25, 29] 3) [35, 39] 4) [9, 45]

Решение:

Формула $(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q))$ тождественно истинна тогда и только тогда, когда $A \cap P = A \cap Q$, т.е. $A \subseteq (P \cap Q) \cup ((-P) \cap (-Q))$, где $-X$ обозначает дополнение множества X . Этому условию удовлетворяет только отрезок [21, 29].

Ответ: [25, 29] (вариант 2).

A10.4

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [54, 84]$ и $Q = [64, 94]$.

Выберите такой отрезок A , что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Если подходящих отрезков несколько, укажите наиболее длинный отрезок.

Варианты ответов:

- 1) [25, 40] 2) [45, 61] 3) [65, 82] 4) [75, 83]

Решение:

Формула $(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q))$ тождественно истинна тогда и только тогда, когда $A \cap P = A \cap Q$, т.е. $A \subseteq (P \cap Q) \cup ((-P) \cap (-Q))$, где $-X$ обозначает дополнение множества X . Этому условию удовлетворяют отрезки [25, 40] и [65, 82]. Более длинный из них – отрезок [65, 82].

Ответ: [65, 82] (вариант 3).

A10.5

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [34, 64]$ и $Q = [74, 94]$.

Выберите такой отрезок A , что формула

$$(x \in P) \rightarrow ((x \in A) \equiv (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Если подходящих отрезков несколько, укажите наиболее длинный отрезок.

Варианты ответов:

- 1) [5, 33] 2) [25, 42] 3) [45, 71] 4) [65, 90]

Решение:

Формула $(x \in P) \rightarrow ((x \in A) \equiv (x \in Q))$ тождественно истинна тогда и только тогда, когда $P \cap A = P \cap Q$. Т.к. $P \cap Q$ – пустое множество, то A не должно пересекаться с P . Этому условию удовлетворяют отрезки [5, 33] и [65, 90]. Более длинный из них – отрезок [5, 33].

Ответ: [5, 33] (вариант 1).

A10.6

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [34, 84]$ и $Q = [44, 94]$.

Выберите такой отрезок A , что формула

$$(x \in P) \rightarrow ((x \in A) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Если подходящих отрезков несколько, укажите наиболее длинный отрезок.

Варианты ответов:

- 1) [45, 60] 2) [65, 81] 3) [85, 102] 4) [105, 123]

Решение:

Формула $(x \in P) \rightarrow ((x \in A) \rightarrow (x \in Q))$ тождественно истинна тогда и только тогда, когда $P \cap A \subseteq P \cap Q$. Этому условию удовлетворяют все указанные отрезки. Наиболее длинный из них – отрезок [105, 123].

Ответ: [105, 123] (вариант 4).

A10.7

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [30, 50]$ и $Q = [70, 90]$.

Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in Q) \wedge ((x \in A) \rightarrow (x \in P))) \rightarrow ((x \in A) \wedge ((x \in P) \rightarrow (x \in Q)))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Если подходящих отрезков несколько, укажите наиболее длинный отрезок.

Варианты ответов:

- 1) [25, 55] 2) [35, 66] 3) [45, 77] 4) [55, 98]

Решение:

Формула $((x \in Q) \wedge ((x \in A) \rightarrow (x \in P))) \rightarrow ((x \in A) \wedge ((x \in P) \rightarrow (x \in Q)))$ тождественно истинна тогда и только тогда, когда $Q \cap A \subseteq P \cap A$. Так как множества Q и P не пересекаются, то это возможно только, если $A \cap Q = \emptyset$. Это выполнено только для отрезков [25, 55] и [35, 66]. Более длинный из них – отрезок [35, 66].

Ответ: [35, 66] (вариант 2).

A10.8

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [6, 26]$ и $Q = [30, 50]$.

Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in Q)) \vee (x \in P)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Если подходящих отрезков несколько, укажите наиболее длинный отрезок.

Варианты ответов:

- 1) [5, 15] 2) [8, 18] 3) [5, 55] 4) [20, 40]

Решение:

Преобразуем выражение – заменим импликацию дизъюнкцией. Получим:

$$(\neg(x \in A)) \vee ((x \in Q) \vee (x \in P)) \quad (1)$$

Выражение $((x \in Q) \vee (x \in P))$ истинно для тех только тех x , которые лежат в $P \cup Q$. То есть выражение (1) эквивалентно

$$(\neg(x \in A)) \vee (x \in P \cup Q),$$

что эквивалентно

$$(x \in A) \rightarrow (x \in P \cup Q).$$

Последнее выражение тождественно истинно тогда и только тогда, когда $A \subseteq P \cup Q$. Этому условию удовлетворяет только отрезок $[5, 15]$.

Ответ: $[8, 18]$ (вариант 2).

A10.9

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [6, 16]$ и $Q = [30, 50]$.

Отрезок A таков, что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in Q)) \vee (x \in P)$$

Какова наибольшая возможная длина отрезка A ?

Варианты ответов:

- 1) 10 2) 20 3) 21 4) 30

A10.10

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10, 40]$ и $Q = [30, 50]$.

Отрезок A таков, что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in Q)) \vee (x \in P)$$

Какова наибольшая возможная длина отрезка A ?

Варианты ответов:

- 1) 10 2) 20 3) 30 4) 40