

С3 Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 22. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 22 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 21$.

Говорят, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть первым ходом? Укажите все такие значения.

б) Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

2. Укажите два значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причем (а) Петя не может выиграть первым ходом, но (б) Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня.

Для указанных значений S опишите выигрышную стратегию Пети.

3. Укажите такое значение S , при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, но при этом у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На ребрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах – количество камней в позиции.

**Содержание верного ответа и указания по оцениванию
(допускаются иные формулировки ответа, не искажающие его смысла)**

(допускаются иные формулировки ответа, не искажающие его смысла)

1. а) Петя может выиграть первым ходом, если $S = 11, \dots, 21$. Во всех случаях нужно удвоить количество камней в куче. При меньших значениях S за один ход нельзя получить кучу, в которой больше 21 камня.
 б) Ваня может выиграть первым ходом (как бы ни играл Петя), если исходно в куче будет $S = 10$ камней. Тогда после первого хода Пети в куче будет 11 камней или 20 камней. В обоих случаях Ваня удваивает количество камней и выигрывает первым ходом.
2. Возможные значения S : 5 и 9. В этих случаях Петя, очевидно, не может выиграть первым ходом. Однако он может получить кучу из 10 камней. Эта позиция разобрана в п. 1б. В ней игрок, который будет ходить (теперь это Ваня), выиграть не может, а его противник (то есть, Петя) следующим ходом выигрывает.
3. Возможное значение S : 8. После первого хода Пети в куче будет 9 или 16 камней. Если в куче станет 16 камней, Ваня удвоит количество камней и выиграет первым ходом. Ситуация, когда в куче 9 камней, разобрана в п. 2. В этой ситуации игрок, который будет ходить (теперь это Ваня), выигрывает своим вторым ходом.
 В таблице изображено дерево возможных партий при описанной стратегии Вани. Заключительные позиции (в них выигрывает Ваня) подчеркнуты. На рисунке это же дерево изображено в графическом виде (оба способа изображения дерева допустимы).

Положения после очередных ходов				
И.п.	1-й ход Пети (разобраны все ходы)	1-й ход Вани (только ход по стратегии)	2-й ход Пети (разобраны все ходы)	2-й ход Вани (только ход по стратегии)
8	$8+1=9$	$9+1=10$	$10+1=11$	<u>$11*2=22$</u>
			$10*2=20$	<u>$20*2=40$</u>
	$8*2=16$	<u>$16*2=32$</u>		

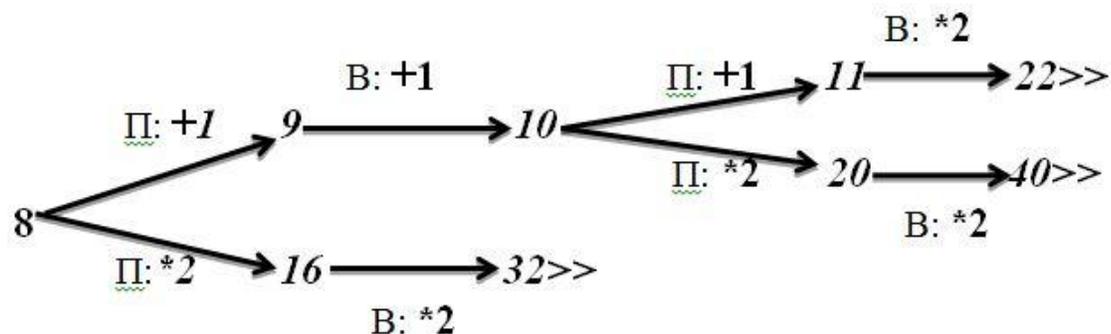


Рис.1. Дерево всех партий, возможных при Ваниной стратегии. Знаком >> обозначены позиции, в которых партия заканчивается.

Указания по оцениванию	Баллы
<p>В задаче от ученика требуется выполнить 3 задания. Их трудность возрастает. Количество баллов в целом соответствует количеству выполненных заданий (подробнее см. ниже).</p> <p>Ошибка в решении, не искажающая основного замысла, например, арифметическая ошибка при вычислении количества камней в заключительной позиции, при оценке решения не учитывается.</p> <p>Первое задание считается выполненным полностью, если выполнены полностью оба пункта а) и б). Пункт а) считается выполненным полностью, если правильно указаны все позиции, в которых Петя выигрывает первым ходом и указано, каким должен быть первый ход. Пункт б) считается выполненным, если правильно указана позиция, в которой Ваня выигрывает первым ходом и описана стратегия Вани, т.е. показано, как Ваня может получить кучу, в которой содержится нужное количество камней при любом ходе Пети.</p> <p>Первое задание считается выполненным частично, если выполнены все следующие условия: (1) правильно указаны все позиции, в которых Петя выигрывает первым ходом, (2) правильно указана позиция, в которой Ваня выигрывает первым ходом; (3) явно сказано, что при любом ходе Пети Ваня может получить кучу, которая содержит нужное для выигрыша количество камней. Отличие от полного решения в том, что выигрышные ходы не указаны.</p> <p>Второе задание выполнено, если правильно указаны обе позиции, выигрышные для Пети и описаны соответствующие</p>	

<p>стратегии Пети – так, как это написано в примере решения или другим способом, например, с помощью дерева всех партий, возможных при выбранных стратегиях.</p> <p>Третье задание выполнено, если правильно указана позиция, выигрышная для Вани и построено дерево всех партий, возможных при Ваниной стратегии. Должно быть явно сказано, что в этом дереве в каждой позиции, где должен ходить Петя, разобраны все возможные ходы, а для позиций, где должен ходить Ваня – только ход, соответствующий стратегии, которую выбрал Ваня.</p> <p>Во всех случаях стратегии могут быть описаны так, как это сделано в примере решения или другим способом.</p>	
<p>Выполнены второе и третье задания. Первое задание выполнено полностью или частично. Здесь и далее допускаются арифметические ошибки, которые не искажают сути решения и не приводят к неправильному ответу (см. выше).</p>	3
<p>Не выполнены условия, позволяющие поставить 3 балла, и выполнено одно из следующих условий.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Задание 3 выполнено полностью. 2. Первое и второе задания выполнены полностью. 3. Первое задание выполнено полностью или частично; для заданий 2 и 3 указаны правильные значения S. 	2
<p>Не выполнены условия, позволяющие поставить 3 или 2 балла, и выполнено одно из следующих условий.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Первое задание выполнено полностью. 2. Во втором задании правильно указано одно из двух возможных значений S и для этого значения указана и обоснована выигрышная стратегия Пети. 3. Первое задание выполнено полностью или частично и для одного из остальных заданий правильно указано значение S. 4. Для второго и третьего задания правильно указаны значения S. 	1

Не выполнено ни одно из условий, позволяющих поставить 3, 2 или 1 балл	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>3</i>